

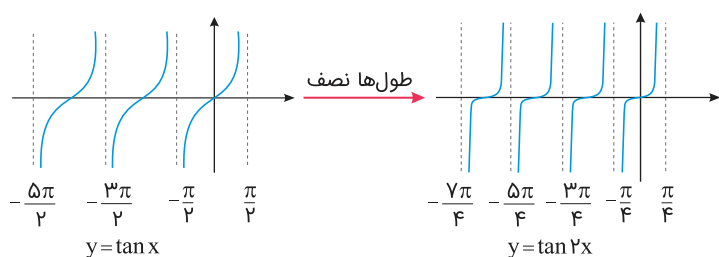


گزینه ۱

۱

بررسی موارد:

مورد "الف":



باتوجه به اینکه تابع $f(x) = \tan 2x$ در نقطه $x = -\frac{3\pi}{4}$ و $x = -\frac{5\pi}{4}$ از بازه $(-\frac{4\pi}{3}, -\frac{\pi}{2})$ تعریف نشده است، نمی‌تواند در این بازه صعودی باشد.
مورد "ب": دامنه تابع $f(x) = \tan(x + \frac{\pi}{4})$ برابر است با:

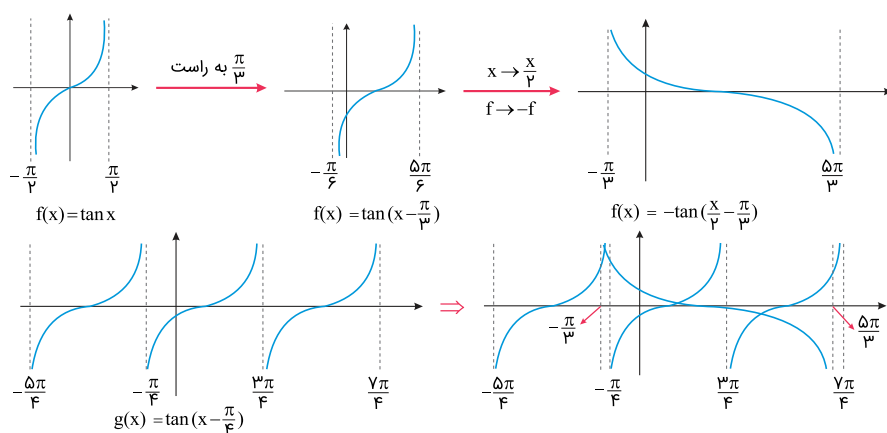
$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x + \frac{\pi}{4} = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}\}$$

مورد "پ":

$$\begin{aligned} D &= \{x \in \mathbb{R} \mid 2x + \frac{\pi}{3} = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x = k\pi + \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{12}, k \in \mathbb{Z}\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x = (6k + 1)\frac{\pi}{12}, k \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

بنابراین تنها مورد "پ" درست است.

نمودار دو تابع را رسم می‌کنیم:



بنابراین در سه نقطه متقاطع‌اند.

باتوجه به نمودار داریم: $a = -۲$

به ازای $x = \frac{۲۷\pi}{۵}$ داریم $y = -۲$.

$$-۲ = -۲ \cos\left(\frac{۲۷\pi}{۵}b + c\right) \Rightarrow \frac{۲۷\pi}{۵}b + c = ۲\pi$$

نقطه $x = \frac{۹\pi}{۱۰}$ اولین نقطه‌ای است که کسینوس در آن صفر شده است. بنابراین:

$$\frac{۹\pi}{۱۰}b + c = \frac{\pi}{۲} \Rightarrow \begin{cases} \frac{۲۷\pi}{۵}b + c = ۲\pi \\ \frac{۹\pi}{۱۰}b + c = \frac{\pi}{۲} \end{cases}$$

$$\Rightarrow b = \frac{۱}{۳}, c = \frac{\pi}{۵} \Rightarrow abc = \frac{-۲\pi}{۱۵}$$

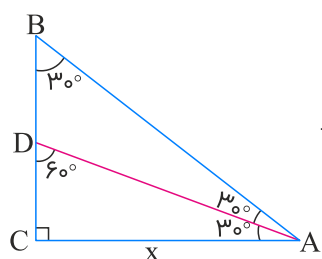
$$\sin x = \cos 2x \Rightarrow \sin x = 1 - 2\sin^2 x$$

$$2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = -1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{2}, \dots \\ \sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \dots \end{cases}$$

مثلث تشکیل شده متساوی الاضلاع است.

طول پاره خط AC را x در نظر می گیریم:

در مثلث $\triangle ABC$:



$$\tan 60^\circ = \frac{BC}{AC} = \sqrt{3} \Rightarrow BC = x\sqrt{3}$$

در مثلث $\triangle ACD$:

$$\sin 60^\circ = \frac{AC}{AD} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AD = \frac{2\sqrt{3}}{3}x \Rightarrow \frac{AD}{BC} = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}x}{x\sqrt{3}} = \frac{2}{3}$$

$$\sin 2x = \cos x \Rightarrow \sin 2x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} - x \\ 2x = 2k\pi + \pi - \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ 3x = 2k\pi + \frac{3\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \frac{(2k+1)\pi}{6} & (1) \\ x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{2} = \frac{(2k+2)\pi}{6} & (2) \end{cases}$$

به ازای $k = 5$ مجموعه جواب (۱) برابر $\frac{11\pi}{6}$ می شود.

$$\frac{\tan 17^\circ \tan(90^\circ - 17^\circ)}{\underbrace{-\tan(180^\circ - 54^\circ) \cot 54^\circ}_{-\tan(54^\circ)}} = \frac{\tan 17^\circ \cot 17^\circ}{\tan 54^\circ \cot 54^\circ} = \frac{1}{1} = 1$$

نمودار تابع در یک دوره تناوب رسم شده است و نقطه $x = \pi$ مشخص شده در نمودار برابر است با $\frac{T}{4}$. بنابراین:

$$\frac{T}{4} = \pi \Rightarrow T = 4\pi$$

بنابراین گزینه‌های "۳" و "۴" حذف می‌شوند، زیرا دوره تناوبشان π است. همچنین باتوجه به اینکه ماکزیمم تابع برابر است با ۵، پس گزینه "۱" هم حذف می‌شود، زیرا ماکزیمم مقدار تابع گزینه "۱"، ۷ است. پس تنها گزینه ممکن گزینه "۲" می‌باشد.

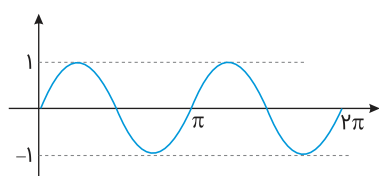
نکته: $\tan x + \cot x = \frac{2}{\sin 2x}$
اثبات:

$$\begin{aligned}\tan x + \cot x &= \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{2} \sin 2x} = \frac{2}{\sin 2x}\end{aligned}$$

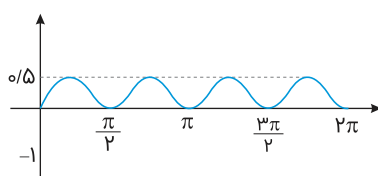
حال داریم:

$$y = \frac{\sin 2x}{\tan x + \cot x} = \frac{\sin 2x}{\frac{2}{\sin 2x}} = \frac{1}{2} \sin^2 2x$$

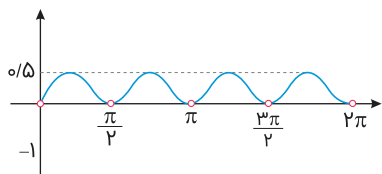
همان طور که در شکل می‌بینیم، دوره تناوب تابع $\frac{\pi}{2}$ است.



$y = \sin 2x$



$y = \frac{1}{2} \sin^2 2x$



$y = \frac{\sin 2x}{\tan x + \cot x}$

می‌دانیم:

$$\cot 45^\circ = 1, \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \tan 60^\circ = \sqrt{3}, \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\begin{aligned}A &= \frac{1 + (\sqrt{3})^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{1 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{1 + 3 + \frac{3}{4}}{1 + \frac{3}{4}} = \frac{4 + 12 + 3}{4} = \frac{19}{4}\end{aligned}$$

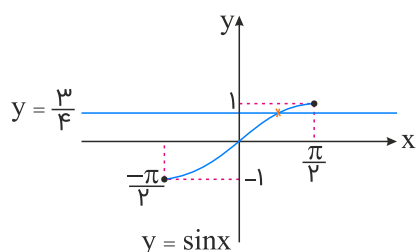
$$\sin 57^\circ = \sin(36^\circ + 21^\circ) = \sin 21^\circ = \sin(18^\circ + 3^\circ) = -\sin 3^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\tan \frac{11\pi}{4} = \tan(2\pi + \frac{3\pi}{4}) = \tan \frac{3\pi}{4} = \tan(\pi - \frac{\pi}{4}) = -\tan \frac{\pi}{4} = -1$$

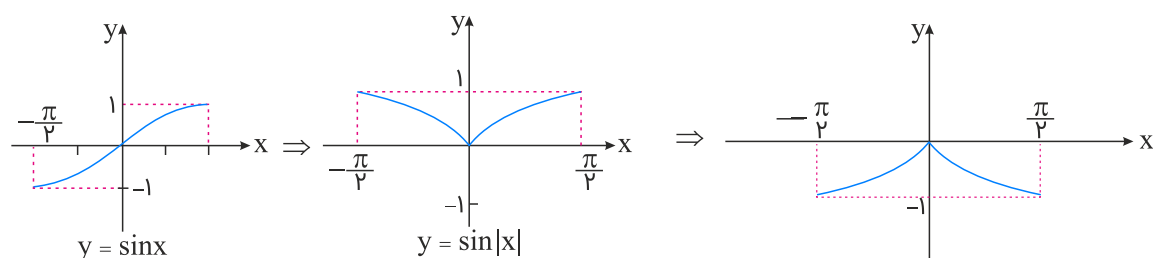
$$\Rightarrow \sin 57^\circ - \tan(\frac{11\pi}{4}) = -\frac{1}{2} - (-1) = \frac{1}{2}$$

$$2 \cos(x - \frac{\pi}{2}) = \frac{3}{2} \Rightarrow \cos(\frac{\pi}{2} - x) = \frac{3}{4} \Rightarrow \sin x = \frac{3}{4}$$

از روش هندسی کمک می‌گیریم:



همان‌طور که دیده می‌شود، نمودار $y = \frac{3}{4}$ و نمودار $y = \sin x$ در بازه $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ فقط یک نقطه برخورد دارند.



$$\sin^2 a + \overbrace{\sin^2 a}^{\sin a \cos a} = 1 \xrightarrow{\div \cos^2 a} \tan^2 a + \sin^2 a = \frac{1}{\cos^2 a}$$

$$\Rightarrow \tan^2 a + \sin^2 a = 1 + \tan^2 a \Rightarrow \sin^2 a = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \sin a \sin 2x + \frac{1}{2} \sin 3x = \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{2} \sin 3x = 0$$

$$\Rightarrow \sin 2x = -\sin 3x \Rightarrow \sin 2x = \sin(-3x)$$

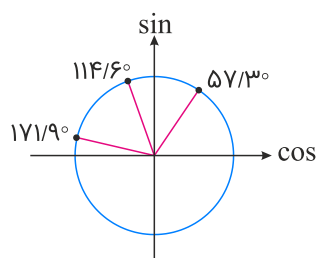
$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi - 3x \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{5} \xrightarrow{x \in [0, \frac{3\pi}{2}]} \begin{cases} k=0 \Rightarrow x=0 \\ k=1 \Rightarrow x=\frac{2\pi}{5} \\ k=2 \Rightarrow x=\frac{4\pi}{5} \\ k=3 \Rightarrow x=\frac{6\pi}{5} \end{cases} \\ 2x = (2k+1)\pi + 3x \Rightarrow x = -(2k+1)\pi \xrightarrow{x \in [0, \frac{3\pi}{2}]} k=-1 \Rightarrow x=\pi \end{cases}$$

بنابراین معادله دارای ۵ جواب در بازه $[0, \frac{3\pi}{2}]$ است.

$$۱ \text{ رادیان} \simeq ۵۷/۳^\circ$$

$$۲ \text{ رادیان} \simeq ۱۱۴/۶^\circ$$

$$۳ \text{ رادیان} \simeq ۱۷۱/۹^\circ$$



$$\Rightarrow \underbrace{\cos ۱۷۱/۹^\circ}_c < \underbrace{\cos ۱۱۴/۶^\circ}_b < \underbrace{\cos ۵۷/۳^\circ}_a$$

$$\sin x + \cos x = \frac{\sqrt{6}}{2} \Rightarrow (\sin x + \cos x)^2 = \frac{6}{4}$$

$$\Rightarrow 1 + 2 \sin x \cdot \cos x = \frac{6}{4} \Rightarrow \sin x \cdot \cos x = \frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned} \tan x + \frac{1}{\tan x} &= \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cdot \cos x} \\ &= \frac{1}{\sin x \cdot \cos x} = 4 \end{aligned}$$

$$-\sin x + \frac{1}{2} = \sin x \Rightarrow \sin x = \frac{1}{4} \Rightarrow \cos^2 x = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 \Rightarrow \cos^2 x = \frac{15}{16}$$

x در ربع دوم است، پس $\cos x < 0$ داریم:

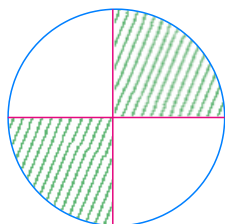
$$\cos x = \frac{-\sqrt{15}}{4} \Rightarrow \tan(x - \pi) = \tan x = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{-\sqrt{15}}{4}} = -\frac{1}{\sqrt{15}}$$

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$$

$$\frac{1 - 2\sin^2 x - 2}{1 + \sin^2 x} = -1 \Rightarrow 1 - 2\sin^2 x - 2 = -1 - \sin^2 x$$

$$\Rightarrow \sin^2 x = 0 \Rightarrow x = k\pi$$

۱۷۲° در ربع دوم قرار دارد و در این ربع تانژانت منفی است، بنابراین گزینه "۲" نادرست می‌باشد. در ربع اول اگر $45^\circ < x < 90^\circ$ باشد، آنگاه $\sin x > \cos x$ است.



$$45^\circ < x < 90^\circ \Rightarrow \sin x > \cos x$$

$$\xrightarrow[\cos x > 0]{\div \cos x} \tan x > 1 \Rightarrow \tan 82^\circ > 1$$

بنابراین گزینه "۱" نادرست است.

در ربع سوم اگر $180^\circ < x < 225^\circ$ باشد، $\sin x > \cos x$ است.

$$180^\circ < x < 225^\circ \Rightarrow \sin x > \cos x$$

$$\xrightarrow[\cos x < 0]{\div \cos x} \tan x < 1 \Rightarrow 0 < \tan 192^\circ < 1$$

توجه شود که در ربع سوم $\tan x > 0$ است. بنابراین گزینه "۳" صحیح می‌باشد.

در ربع سوم اگر $225^\circ < x < 270^\circ$ باشد، $\sin x < \cos x$ است.

$$225^\circ < x < 270^\circ \Rightarrow \sin x < \cos x$$

$$\xrightarrow[\cos x < 0]{\div \cos x} \tan x > 1 \Rightarrow \tan 252^\circ > 1$$

بنابراین گزینه "۴" نادرست است.

بررسی گزینه‌ها:

در گزینه "۴"، کمترین مقدار تابع -1 است، اما در نمودار داده‌شده، کمترین مقدار تابع صفر است. پس این گزینه رد می‌شود.

گزینه "۱" و "۲" در همسایگی راست صفر صعودی هستند، پس این گزینه‌ها هم حذف می‌شوند. بنابراین گزینه "۳" درست است.